1085. Lebesgue measures ノ Direct Produkt ニ就テ

中野秀五郎（東大）

今年ノ十月ノ年會ノ特別講演トシテ，角谷君ガ measure ノアル Boolean Algebra ハ可附番個ノ Lebesgue measures ノ Direct Produkt ノ direct sum デアルコトヲ述ベラレタ。其ノトキ最モ興味ノ中心タル Maharam ノ證明ニツイテハ何等フレナカッタガ角谷君カラ直接聞クトコロニヨルト中々面倒デアリマス。此ノ證明ハ次ノヤウニ考ヘルト比較的簡單ニナルノデハナイカト思フノデ以下述ベテ見マセウ。

二ツノ measure ノアル Boolean Algebra $\mathfrak{A}$ ト $\mathfrak{B}$ トガアルトキ，$\mathfrak{A}$ ノ Basis $\{a_\alpha\}$，$\mathfrak{B}$ ノ Basis $\{b_\alpha\}$ トノ間ニ一對一ノ對應 $a_\alpha \longleftrightarrow b_\alpha$ ガアリ，此ノ對應ニ於テ，$a_\alpha \geqq a_\beta$ ナラバ，$b_\alpha \geqq b_\beta$；$a_\alpha a_\beta = 0$ ナラバ $b_\alpha b_\beta = 0$．逆モ亦成立シ，然カモ $m a_\alpha = m b_\alpha$ ナレバ $\mathfrak{A}$ ト $\mathfrak{B}$ トハ isomorph トナリマス。故ニ $\mathfrak{A}$ ト $\mathfrak{B}$ トノ isomorph ヲ證明スルノニ二通リノ方法ガアリマス。即チ $\mathfrak{A}$ ノ Basis $\{a_\alpha\}$ ニ對シテ，以上ノヤウナ $\{b_\alpha\}$ ヲ求メル方法ト，$\{b_\alpha\}$ ニ對シテ $\{a_\alpha\}$ ヲ求メル方法デアリマス。

今，$\mathfrak{B}$ ヲ Lebesgue measures ノ直積 $\mathfrak{A}$ ヲ abstrakt ナ measure ノアル Boolean Algebra

トスルトキ，Maharam ノ方法ハ，$\mathfrak{B}$ ノ Basis $\{b_\alpha\}$ ニ對シテ $\{a_\alpha\}$ ヲ求メル方法デアリマス。ソレニ反シテ此処デ述ベマスノハ，$\{a_\alpha\}$ ニ対シテ $\{b_\alpha\}$ ヲ求メルト云フ方法デアリマス。

先ヅ解リ易スクスルタメニ separabel ノ場合ヲ考ヘテミマセウ。$\mathfrak{A}$ ヲ可附番個ノ Basis ヲ有ス atomic デナイ measure ノアル Boolean algebra $\mathfrak{B}$ ヲ $(0,1)$ ニ於ケル Lebesgue measure トシマス。$(0,1)$ ヲ二等分シ，更ニソレヲ二等分シテ得ラレル可附番個ノ區間ハ確カニ $\mathfrak{B}$ ノ Basis $\{b_\alpha\}$ デアリマス。其レニ對スル $\mathfrak{A}$ ノ要素 ヲ求メルノニ，先ヅ $ma=\frac{1}{2}$ ($m1=1$ トシマス) ナル $a\in\mathfrak{A}$ ノ存在ヲ transfinite Induction デ求メマス。

以下同様ニシテ $\{b_\alpha\}$ ニ對應スル $\{a_\alpha\}$ ヲ求メテ行キマスが，コノヤウニシテ得ラレル $\{a_\alpha\}$ ハ $\mathfrak{A}$ ノ Basis デアルトハ云ハレマセン。(コレが Freudenthal ノ証明ノ不完全ナトコロデアリマス)。然シコノ方法ハ $\mathfrak{A}$ ノ Basis が可附番個以上ノ場合ニハ Maharam ノ様ニ成功スルノデアリマス。此ノ Freudenthal ノ証明ノ不完全ヲ補フタメニ私ハ次ノヤウニ致シマシタ。即チ $\mathfrak{A}$ ノ Basis $\{a_\alpha\}$ カラ dyadisch ナ形ノ Basis $1, a_i, a_{i_1 i_2}, \ldots\ldots$ $(i=0,1)$ ヲツクリ，$ma_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda}$ ニ對シテ其ノ長サノ区間ヲ $(0,1)$ 間ニ取ッテ行クノデアリマス。コノ様ニシテ得ラレタ $\{b_\alpha\}$ ハ $\mathfrak{B}$ ノ Basis ト

ナルコトハ明ラカデアリマス。此ノ方法デ一般ノ場合ヲ証明シマセウ。

補助定理. Iヲ measure space. $\mathfrak{L}$ヲ Lebesgue measure ノアル Interval $(0,1)$ トシマス。直積 $\mathrm{I}\times\mathfrak{L}$ ノ一組ノ Basis トシテ次ノヤウナノガアリマス。$0\leqq\alpha\leqq1$ ニ対シテ, Iデ measurable ナ函数 $f_\alpha(x)$ ガ對應シ

$$1)\quad \alpha=\int_{\mathrm{I}} f_\alpha(x)\,dx$$

$$2)\quad \alpha<\beta \text{ ナラバ } \qquad 0\leqq f_\alpha(x)\leqq f_\beta(x)\leqq 1$$

$$3)\quad \alpha\to\beta-0 \text{ ナラバ } f_\alpha(x) \text{ ハ } \mathrm{I} \text{ ニテ一様ニ } f_\beta(x)$$

ニ收斂スルトキハ Iノ任意ノ measurable set T ニ對シ

$$A_\alpha(T):(x,y)\qquad x\in T,\quad 0\leqq y\leqq f_\alpha(x)$$

ナル点集合 A_α ハ $\mathrm{I}\times\mathfrak{L}$ ノ Basis デアリマス。

証明. $0\leqq\alpha_0<1$ ナル任意ノ α_0 ニ対シ

$$A'\quad (x,y):\ x\in T\qquad 0\leqq y\leqq\alpha_0$$

ガ、以上ノ A_α カラ可附番個ノ和, 差, 積ニヨリ measure zero ヲ除イテ得ラレルコトヲ証明スレバ充分デアリマス。

εヲ充分小ナル任意ノ正数トシマス。然ルトキハ 3) ノ假定ニヨリ可附番個ノ順序数 $1,2,\cdots\cdots,\omega,\cdots\cdots$ ニ對シテ $1=\alpha_1>\alpha_2>\cdots\cdots\longrightarrow 0$ ヲ適當ニ定メテ

$$f_{\alpha_\lambda}(x) \geqq f_{\alpha_{\lambda+1}}(x) \geqq f_{\alpha_\lambda}(x) - \varepsilon$$

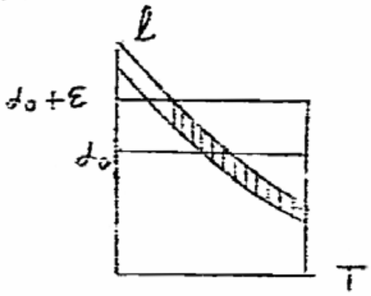
ナラシメルコトガ出来マス。然ルトキハ measure zero ヲ除イテ

$$A' = \sum_\lambda A'(A_{\alpha_\lambda} - A_{\alpha_{\lambda+1}}).$$

又，$$T_\lambda = E[x;\ f_{\alpha_\lambda}(x) \leqq \alpha_0 + \varepsilon]$$

$$B_\lambda:\ (x, y):\ x \in T_\lambda,\ f_{\alpha_{\lambda+1}}(x) < y \leqq f_{\alpha_a}(x)$$

トスレバ $$B_\lambda = A_{\alpha_\lambda}(T_\lambda) \dot{-} T_{\alpha_{\lambda+1}}(T_\lambda)$$



デ，而カモ

$$A'(A_{\alpha_\lambda} - A_{\alpha_{\lambda+1}}) \subset B_\lambda$$

デアリマス。又

$$A'':\ (x, y)\quad x \in T,\quad 0 \leqq y \leqq \alpha + \varepsilon$$

ニ對シテハ

$$B_\lambda \subset A''$$

故ニ measure zero ヲ除イテ

$$A' \subset \sum_\lambda B_\lambda \subset A''$$

デアリマス。然ルニ $mA'' = mA' + \varepsilon$ デアリマスカラ measure zero ヲ除イテ

$$A' = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sum_\lambda B_\lambda \right)$$

故ニ証明サレマシタ。

偖テ次ニ本定理ヲ証明シマセウ。即チ $\mathfrak{a}$ ヲ measure ノアル Boolean Algebra. 從ッテ當然 complete デアリマス。又 $\mathfrak{a}$ ノ character ヲ $\mathfrak{c}$ トシ、$\mathfrak{a}$ ハ homogeneous トシマス。$\mathfrak{a}$ ノ Basis ヲ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_\lambda, \cdots\cdots$ トシマス。Transfinite Induction ヲ用ヒマス。$\{a_\lambda\}$ $(\lambda < \lambda_0)$ ヲ $a_1, a_2, \cdots\cdots$ カラ generate サレタ $\mathfrak{a}$ ノ complete ナ部分 Boolean Algebra トシマス。$\{a_\lambda\}$ ハ Lebesgue measure ノ直積 I ト isomorph トシマス。

次ニ $\{a_\lambda\}$ ニ a_{λ_0} 及ビ他ノ爲クトモ可附番個ヲ附ケ加ヘテ $\mathfrak{a}_0$ ヲ作リ、此レガ $\mathrm{I}\times\mathfrak{b}$ ト isomorph デ、然カモ $\{a_\lambda\}$ ト I トノ isomorphism ガ保存サレテヰルコトヲ証明スレバ充分デアリマス。$a\in\{a_\lambda\}$ ニ對應スル I ノ measurable set ヲ A_a トシマス。然ルトキハ $a\in\{a_\lambda\}$ ニ對シ

$$0 \leqq m\, a_{\lambda_0} a = F(A_a) \leqq 1$$

ナル $F(A_a)$ ハ total additive デアリマスカラ Radon-Nikodym ノ定理ニヨリ

$$F(A_a) = \int_{A_a} f(x)\,dx \qquad 0 \leqq f(x) \leqq 1$$

ナル $f(x)$ ガ存在スル。然カモ

$$\alpha_0 = \int_{\mathrm{I}} f(x)\,dx = m\, a_{\lambda_0}$$

トスレバ、$0 < \alpha_0 < 1$ デアリマス。故ニ α_0 ニ此ノ $f(x)$

ヲ對應サセマス。次ニ α_0 ト $1-\alpha_0$ 大ナル方ニ對シ（α_0 ガ大ナレバ $a_{\lambda_0}\{a_\lambda\}$，$1-\alpha_0$ ガ大ナレバ $(1-a_{\lambda_0})\{a_\lambda\}$．例ヘバ，$\alpha_0$ ガ大トスレバ $\mathfrak{b}$ ガ homogenus ナルニヨリ $a_{\lambda_0}>b>0$ デ $a_{\lambda_0}\{a\}$ ニ屬サヌ b ガ存在シマス。此ノ b ニ對シ，$mba=F_b(A_a)$ ハ total additive ナレバ，Hahn ノ定理ニヨリ $A_{a_1}A_{a_2}=0$，$A_{a_1}+A_{a_2}=I$ デ

$$F_b(A)\begin{cases}\geqq \frac{1}{2}\alpha_0 & in\ A_{a_1}\\ \leqq \frac{1}{2}\alpha_0 & in\ A_{a_2}\end{cases}$$

ナル A_{a_1}，$A_{a_2}\in I$ ガ存在シマス。b_{a_1} カ $a_{\lambda_0}-b_{a_2}$ ノ何レカ一方ハ $a_{\lambda_0}\{a\}$ ニ屬サナイ。故ニソノ屬サヌ方ニ對シ例ヘバ ba_1 ニ對シテ

$$m\,ba_1a=\int_{A_a}f(x)\,dx$$

ナル $f(x)$ ガ前ト同様ニシテ存在シマス。然カモ

$$\frac{1}{2}f_{\alpha_0}(x)\leqq f(x)\leqq f_{\alpha_0}(x)$$

デアリマス。以下同様ニシテ可附番個ノ順序數 $0,1,2,\text{------}\cdots,\omega,\text{-----}$ ニ對シテ $a'_0(=aa_0)$，$a'_2(=ba_1)$，$a'_2,\cdots\cdots,a'_\omega,\text{-----}$ ガ定マリ共ニ對應シテ

$$m\,a'_\mu a=\int_{A_a}f_{\alpha_\mu}(x)\,dx\qquad (a\in\{a_\lambda\})$$

$$\alpha_\mu=\int_I f_{\alpha_\mu}(x)\,dx\qquad (\mu=1,2,\text{-----},\omega,\text{-----})$$

$$f_{\alpha_\mu}(x) \geqq f_{\alpha_\nu}(x) \qquad (\alpha_\mu > \alpha_\nu)$$

ナル $f_{\alpha_\mu}(x)$ ガ存在シ，然カモ α_μ ニ對シテ

$\alpha_{\mu_1} < \alpha_\mu < \alpha_{\mu_2}$ ナル最大ノ μ_1, μ_2 ガ存在スルカ，叉ハ

$\lim\limits_{\lambda \uparrow \mu} \alpha_\lambda = \alpha_\mu$ デアツテ，前ノ場合ニハ

$$\frac{1}{2}\left\{f_{\alpha_{\mu_1}}(x) + f_{\alpha_{\mu_2}}(x)\right\} \leqq f_{\alpha_\mu}(x) \leqq f_{\alpha_{\mu_2}}(x)$$

後ノ場合ニハ

$$\lim_{\lambda \uparrow \mu} f_{\alpha_\lambda}(x) = f_{\alpha_\mu}(x)$$

ナル關係ニアリマス。此ノコトカラ $\alpha_{\lambda_1} \leqq \alpha_{\lambda_2} \leqq \cdots\cdots \to \alpha$

ナルトキハ $f_{\alpha_{\lambda_1}}(x) \leqq f_{\alpha_{\lambda_2}}(x) \leqq \cdots\cdots$ ガ一様ニ收斂スルコ

トガ解リマス。故ニ $a a'_\mu$ $(a \in \{a_\lambda\})$ ニ對シテ

A_μ: (x, y), $x \in A_a$, $0 \leqq y \leqq f_{\alpha_\mu}(x)$

ヲ對應セシナレバ，補定理ニヨリ，$\{a_\lambda, a_{\lambda_0}, a'_1, \cdots\cdots\}$ ト

正ソカトガ *isomorph* ナコトガ解リマス。